

---

**COMPTES RENDUS**

**HEBDOMADAIRES**

**DES SÉANCES**

**DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.**

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C<sup>ie</sup>, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

---

# COMPTES RENDUS

HEBDOMADAIRES

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

PUBLIÉS,

CONFORMÉMENT A UNE DÉCISION DE L'ACADÉMIE

EN DATE DU 13 JUILLET 1835,

PAR MM. LES SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

—•••—

TOME CENT-SOIXANTE-QUATRIÈME.

JANVIER — JUIN 1917.

—•••—

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS et C<sup>ie</sup>, IMPRIMEURS-LIBRAIRES  
DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,  
Quai des Grands-Augustins, 55.

1917



---

---

# ÉTAT DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

AU 1<sup>er</sup> JANVIER 1917.

## SCIENCES MATHÉMATIQUES.

### SECTION I<sup>re</sup>. — *Géométrie.*

Messieurs:

JORDAN (Marie-Ennemond-Camille), O. \*.  
PICARD (Charles-Émile), O. \*.  
APPELL (Paul-Émile), C. \*.  
PAINLEVÉ (Paul), \*.  
HUMBERT (Marie-Georges), O. \*.  
HADAMARD (Jacques-Salomon), \*.

### SECTION II. — *Mécanique.*

BOUSSINESQ (Joseph-Valentin), O. \*.  
DEPREZ (Marcel), O. \*.  
SEBERT (Hippolyte), C. \*.  
VIEILLE (Paul-Marie-Eugène), C. \*.  
LECORNU (Léon-François-Alfred), O. \*.  
N. . . . .

### SECTION III. — *Astronomie.*

WOLF (Charles-Joseph-Étienne), O. \*.  
DESLANDRES (Henri-Alexandre), \*.  
BIGOURDAN (Guillaume), \*.  
BAULLAUD (Édouard-Benjamin), C. \*.  
HAMY (Maurice-Théodore-Adolphe), \*.  
PUISEUX (Pierre-Henri), \*.

### SECTION IV. — *Géographie et Navigation.*

GRANDIDIER (Alfred), O. \*.  
BASSOT (Jean-Antoine-Léon), C. \*.  
BERTIN (Louis-Émile), C. \*.  
LALLEMAND (Jean-Pierre, *dit* Charles), O. \*.  
N. . . . .  
N. . . . .

**SECTION V. — Physique générale.**

Messieurs :

LIPPMANN (Jonas-Ferdinand-Gabriel), C. \*.  
 VIOLLE (Louis-Jules-Gabriel), O. \*.  
 BOUTY (Edmond-Marie-Léopold), O. \*.  
 VILLARD (Paul-Alfred), \*.  
 BRANLY (Désiré-Eugène-Édouard), \*.  
 N. . . . .

**SCIENCES PHYSIQUES.****SECTION VI. — Chimie.**

GAUTIER (Émile-Justin-Armand), C. \*.  
 LEMOINE (Clément-Georges), O. \*.  
 HALLER (Albin), C. \*.  
 LE CHATELIER (Henry-Louis), O. \*.  
 MOUREU (François-Charles-Léon), \*.  
 N. . . . .

**SECTION VII. — Minéralogie.**

BARROIS (Charles-Eugène), O. \*.  
 DOUVILLÉ (Joseph-Henri-Ferdinand), O. \*.  
 WALLERANT (Frédéric-Félix-Auguste), \*.  
 TERMIER (Pierre-Marie), O. \*.  
 LAUNAY (Louis-Auguste-Alphonse DE), \*.  
 N. . . . .

**SECTION VIII. — Botanique.**

GUIGNARD (Jean-Louis-Léon), O. \*.  
 BONNIER (Gaston-Eugène-Marie), O. \*.  
 MANGIN (Louis-Alexandre), C. \*.  
 COSTANTIN (Julien-Noël), \*.  
 N. . . . .  
 N. . . . .

**SECTION IX. — Économie rurale.**

Messieurs :

SCHLÆSING (Jean-Jacques-Théophile), C. \*.  
CHAUVEAU (Jean-Baptiste-Auguste), G. O. \*.  
MÜNTZ (Charles-Achille), O. \*.  
ROUX (Pierre-Paul-Émile), G. O. \*.  
SCHLÆSING (Alphonse-Théophile), O. \*.  
MAQUENNE (Léon-Gervais-Marie), \*.

**SECTION X. — Anatomie et Zoologie.**

RANVIER (Louis-Antoine), O. \*.  
PERRIER (Jean-Octave-Edmond), C. \*.  
DELAGE (Marie-Yves), O. \*.  
BOUVIER (Louis-Eugène), O. \*.  
HENNEGUY (Louis-Félix), O. \*.  
MARCHAL (Paul-Alfred), \*.

**SECTION XI. — Médecine et Chirurgie.**

GUYON (Casimir-Jean-Félix), C. \*.  
ARSONVAL (Jacques-Arsène D'), C. \*.  
LAVERAN (Charles-Louis-Alphonse), C. \*.  
DASTRE (Albert-Jules-Frank), O. \*.  
RICHET (Robert-Charles), C. \*.  
N. . . . .

**SECRETAIRES PERPÉTUELS.**

DARBOUX (Jean-Gaston), G. O. \*, pour les Sciences mathématiques.  
LACROIX (François-Antoine-Alfred), \*, pour les Sciences physiques.

## ACADÉMIE DES SCIENCES.

## ACADÉMICIENS LIBRES.

Messieurs :

FREYCINET (Charles-Louis DE SAULSES DE), O. \*.  
 HATON DE LA GOUPILLIÈRE (Julien-Napoléon), G. O. \*.  
 CARNOT (Marie-Adolphe), C. \*.  
 BONAPARTE (le prince Roland).  
 CARPENTIER (Jules-Adrien-Marie-Léon), C. \*.  
 TISSERAND (Louis-Eugène), G. O. \*.  
 LANDOUZY (Louis-Théophile-Joseph), C. \*.  
 BLONDEL (André-Eugène), \*.  
 GRAMONT (le comte Antoine-Alfred-Arnaud-Xavier-Louis DE), \*.  
 N. . . . .

## MEMBRES NON RÉSIDENTS.

SABATIER (Paul), O. \*, à Toulouse.  
 GOUY (Louis-Georges), \*, à Lyon.  
 BAZIN (Henry-Émile), O. \*, à Chenôve (Côte-d'Or).  
 DEPÉRET (Charles-Jean-Julien), \*, à Lyon.  
 N. . . . .  
 N. . . . .

## ASSOCIÉS ÉTRANGERS.

MONACO (S. A. S. Albert I<sup>er</sup>, prince souverain DE), G. C. \*.  
 RAYLEIGH (lord), à Witham (Angleterre), O. \*.  
 VAN DER WAALS (Joannes-Diderik), à Amsterdam.  
 LANKESTER (Edwin-Ray), à Londres.  
 LORENTZ (Hendrik-Antoon), à Leyde.  
 SCHWENDENER (Simon), à Berlin.  
 N. . . . .  
 N. . . . .  
 N. . . . .  
 N. . . . .  
 N. . . . .  
 N. . . . .

**CORRESPONDANTS.****SCIENCES MATHÉMATIQUES.****SECTION I<sup>re</sup>. — Géométrie (10).**

Messieurs :

- SCHWARZ (Hermann-Amandus), à Grünewald, près Berlin.  
 ZEUTHEN (Hieronymus-Georg), à Copenhague.  
 MITTAG-LEFFLER (Magnus-Gustaf), C. \*, à Stockholm.  
 NETHER (Max), à Erlangen.  
 VOLTERRA (Vito), à Rome.  
 GUICHARD (Claude), à Paris.  
 HILBERT (David), à Göttingue.  
 COSSERAT (Eugène-Maurice-Pierre), à Toulouse.  
 LIAPOUNOFF (Alexandre), à Petrograd.  
 LA VALLÉE POUSSIN (Charles-Jean-Gustave-Nicolas DE), à Louvain,  
 actuellement à Paris.

**SECTION II. — Mécanique (10).**

- VALLIER (Frédéric-Marie-Emmanuel), O. \*, à Versailles.  
 WITZ (Marie-Joseph-Aimé), à Lille.  
 ZABOUDSKI (Nicolas), à Petrograd.  
 LEVI-CIVITA (Tullia), à Padoue.  
 VOIGT (Woldemar), à Göttingue.  
 BOULVIN (Jules), à Gand.  
 SCHWOERER, à Colmar.  
 SPARRE (le comte Magnus-Louis-Marie DE), à Lyon.  
 PARENTY (Henry-Louis-Joseph), O. \*, à Lille.  
 ARIÈS (Louis-Marie-Joseph-Emmanuel), O. \*, à Versailles.

**SECTION III. — Astronomie (16).**

- LOCKYER (sir Joseph-Norman), à Sidmouth.  
 STEPHAN (Jean-Marie-Édouard), O. \*, à Marseille.  
 VAN DE SANDE BAKHUYZEN, C. \*, à Leyde.  
 CHRISTIE (William-Henry), à Greenwich (Angleterre).

Messieurs :

WEISS (Edmund), o. \*, à Vienne.  
 PICKERING (Edward-Charles), à Cambridge (Massachusetts).  
 GAILLOT (J.-B.-Aimable), o. \*, à La Varenne-Saint-Hilaire (Seine).  
 TURNER (Herbert-Hall), à Oxford.  
 HALE (George-Ellery), à Mount Wilson (Californie).  
 KAPTEYN (Jacobus-Cornelius), \*, à Groningue.  
 VERSCHAFFEL (Aloys), à Abbadia (Basses-Pyrénées).  
 LEBEUF (Auguste-Victor), \*, à Besançon.  
 DYSON (F.-W.), à Greenwich.  
 GONNESSIAT (François), \*, à Alger.  
 N. . . . .  
 N. . . . .

SECTION IV. — *Géographie et Navigation* (10).

TEFFÉ (le baron DE), à Rio-de-Janeiro.  
 NANSEN (Fridtjof), c. \*, à Bergen (Norvège).  
 HELMERT (Frédéric-Robert), à Potsdam.  
 COLIN (le P. Édouard-Élie), à Tananarive.  
 BRASSEY (Thomas, lord), c. \*, à Londres.  
 HEDIN (Sven-Anders), c. \*, à Stockholm.  
 HILDEBRAND-HILDEBRANDSSON (Hugo), o. \*, à Upsal.  
 DAVIS (William-Morris), \*, à Cambridge (Massachusetts).  
 N. . . . .  
 N. . . . .

SECTION V. — *Physique générale* (10).

BLONDLOT (Prosper-René), o. \*, à Nancy.  
 MICHELSON (Albert-A.), à Chicago.  
 BENOÎT (Justin-Miranda-René), o. \*, à Courbevoie.  
 CROOKES (sir William), à Londres.  
 BLASERNA (Pietro), c. \*, à Rome.  
 GUILLAUME (Charles-Édouard), o. \*, à Courbevoie.  
 ARRHENIUS (Svante-August), à Stockholm.  
 THOMSON (Joseph-John), à Cambridge.  
 RIGHI (Auguste), à Bologne.  
 N. . . . .

**SCIENCES PHYSIQUES.**

**SECTION VI. — Chimie (10).**

Messieurs :

- FORCRAND DE COISELET (Hippolyte-Robert DE), O. \*, à Montpellier.  
 GUYE (Philippe-Auguste), \*, à Genève.  
 GUNTZ (Nicolas-Antoine), \*, à Nancy.  
 GRAEBE (Carl), à Francfort-sur-le-Mein.  
 BARBIER (François-Antoine-Philippe), O. \*, à Lyon.  
 CIAMICIAN (Giacomo), \*, à Bologne.  
 CHARPY (Augustin-Georges-Albert), \*, à Montluçon.  
 GRIGNARD (François-Auguste-Victor), \*, à Nancy.  
 WALDEN (Paul), à Riga.  
 N. . . . .

**SECTION VII. — Minéralogie (10).**

- GEIKIE (sir Archibald), O. \*, à Haslemer (Angleterre).  
 TSCHERMAK (Gustav), à Vienne.  
 OEHLERT (Daniel), O. \*, à Laval.  
 BRÖGGER (Waldemar-Christofer), C. \*, à Christiania.  
 HEIM (Albert), à Zürich.  
 KILIAN (Charles-Constant-Wilfrid), \*, à Grenoble.  
 LEHMANN (Otto), à Carlsruhe.  
 GROSSOUVRE (Félix-Albert Durand DE), O. \*, à Bourges.  
 BECKE (Friedrich-Johann-Karl), à Vienne.  
 N. . . . .

**SECTION VIII. — Botanique (10).**

- GRAND'EURY (François-Cyrille), \*, à Saint-Étienne.  
 PFEFFER (Wilhelm-Friedrich-Philipp), à Leipzig.  
 WARMING (Johannes-Eugenius-Beilow), à Copenhague.  
 FLAHAULT (Charles-Henri-Marie), O. \*, à Montpellier.  
 BERTRAND (Charles-Eugène), \*, à Lille.  
 BOUDIER (Jean-Louis-Émile), \*, à Montmorency.  
 WIESNER (Julius), à Vienne.  
 ENGLER (Heinrich-Gustav-Adolf), à Dahlem, près Berlin.  
 VRIES (Hugo DE), à Amsterdam.  
 VUILLEMIN (Jean-Paul), à Malzéville, près Nancy.

**SECTION IX. — Économie rurale (10).**

Messieurs :

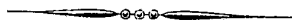
GAYON (Léonard-Ulysse), o. \*, à Bordeaux.  
 WINOGRADSKI (Serge), à Petrograd.  
 YERMOLOFF (Alexis), c. \*, à Petrograd.  
 GODLEWSKI (Emil), à Cracovie.  
 PERRONCITO (Edouardo), o. \*, à Turin.  
 WAGNER (Paul), à Darmstadt.  
 LECLAINCHE (Auguste-Louis-Emmanuel), o. \*, à Toulouse.  
 IMBEAUX (Charles-Édouard-Augustin), \*, à Nancy.  
 BALLAND (Joseph-Antoine-Félix), o. \*, à Saint-Julien (Ain).  
 N. . . . .

**SECTION X. — Anatomie et Zoologie (10).**

RETZIUS (Gustave), c. \*, à Stockholm.  
 SIMON (Eugène-Louis), \*, à Lyons-la-Forêt (Eure).  
 FRANCOIS (Charles-Joseph-Polydore), à Bruxelles.  
 RENAUT (Joseph-Louis), \*, à Lyon.  
 YUNG (Émile-Jean-Jacques), à Genève.  
 LÆB (Jacques), à New-York.  
 RAMON CAJAL (Santiago), c. \*, à Madrid.  
 BOULENGER (George-Albert), à Londres.  
 BATAILLON (Jean-Eugène), \*, à Dijon.  
 N. . . . .

**SECTION XI. — Médecine et Chirurgie (10).**

LÉPINE (Jacques-Raphaël), o. \*, à Lyon.  
 CZERNY (Vincent-Joseph), à Heidelberg.  
 CALMETTE (Léon-Charles-Albert), c. \*, à Lille.  
 MANSON (sir Patrick), à Londres.  
 PAVLOV (Jean-Petrovitz), à Petrograd.  
 BERNSTEIN (Julien), à Halle-sur-Saale.  
 YERSIN (Alexandre-John-Émile), c. \*, à Nha-Trang, Annam.  
 BERGONIÉ (Jean-Alban), o. \*, à Bordeaux.  
 MORAT (Jean-Pierre), \*, à Lyon.  
 DEPAGE (Antoine), à Bruxelles, actuellement à la Panne, Belgique.



---

# COMPTES RENDUS

## DES SÉANCES

### DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

---

SÉANCE DU MARDI 2 JANVIER 1917.

PRÉSIDENCE DE M. C. JORDAN, PUIS DE M. A. DARSONVAL.

---

M. CAMILLE JORDAN, Président sortant, fait connaître à l'Académie l'état où se trouve l'impression des Recueils qu'elle publie et les changements survenus parmi les Membres et les Correspondants pendant le cours de de l'année 1916.

*État de l'impression des Recueils de l'Académie au 1<sup>er</sup> janvier 1917.*

*Comptes rendus des séances de l'Académie.* — Le tome 158 (1<sup>er</sup> semestre de l'année 1914), paru avec ses tables en 1915, a été mis en distribution.

Les tomes 159 (2<sup>e</sup> semestre de l'année 1914) et 160 (1<sup>er</sup> semestre de l'année 1915) sont parus avec leurs tables et ont été mis en distribution.

Le tome 161 (2<sup>e</sup> semestre de l'année 1915) est paru avec ses tables et sera prochainement mis en distribution.

Les numéros des 1<sup>er</sup> et 2<sup>e</sup> semestres de l'année 1916 ont été mis en distribution, chaque semaine, avec la régularité habituelle.

Les tables du tome 162 (1<sup>er</sup> semestre de l'année 1916) sont à l'impression.

*Mémoires de l'Académie.* — Le tome LIV, 2<sup>e</sup> série, est sous presse et sera prochainement mis en distribution.

*Procès-Verbaux des séances de l'Académie des Sciences, tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835.* — Le tome VI, années 1816-1819, a été mis en distribution.

Le tome VII, années 1820-1823, est sous presse et sera prochainement distribué.

*Membres décédés depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1916.*

*Section de Mécanique.* — M. LÉAUTÉ, le 5 novembre.

*Section de Chimie.* — M. JUNGFLAISCH, le 24 avril.

*Académicien libre.* — M. LABBÉ, le 21 mars.

*Membres non résidents.* — M. GOSSELET, le 20 (?) mars; M. DUHEM, le 14 septembre.

*Associés étrangers.* — M. DEDEKIND, le 12 février; M. METCHNIKOFF, le 15 juillet; sir WILLIAM RAMSAY, le 23 juillet.

*Membres à remplacer.*

*Section de Mécanique.* — M. LÉAUTÉ, mort le 5 novembre 1916.

*Section de Géographie et Navigation.* — M. GUYOU, mort le 24 août 1915; M. HATT, mort le 9 octobre 1915.

*Section de Physique générale.* — M. AMAGAT, mort le 15 février 1915.

*Section de Chimie.* — M. JUNGFLAISCH, mort le 24 avril 1916.

*Section de Minéralogie.* — M. A. LACROIX, élu Secrétaire perpétuel pour les Sciences physiques, le 8 juin 1914.

*Section de Botanique.* — M. PRILLIEUX, mort le 7 octobre 1915; M. ZEILLER, mort le 27 novembre 1915.

*Section de Médecine et Chirurgie.* — M. BOUCHARD, mort le 28 octobre 1915.

*Académicien libre.* — M. LABBÉ, mort le 21 mars 1916.

*Membres non résidents.* — M. GOSSELET, mort le 20 (?) mars 1916; M. DUHEM, mort le 14 septembre 1916.

*Associés étrangers.* — M. **ÉDOUARD SUESS**, mort le 26 avril 1914; M. **HITTORF**, mort le 28 novembre 1914.

M. **VON BAEYER**, dont l'élection a été annulée par décision de l'Académie en date du 15 mars 1915; le décret qui avait approuvé l'élection a été rapporté par un nouveau décret en date du 28 mai 1915.

M. **DEDEKIND**, mort le 12 février 1916; M. **METCHNIKOFF**, mort le 15 juillet 1916; sir **WILLIAM RAMSAY**, mort le 23 juillet 1916.

*Correspondants décédés depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1916.*

*Section d'Astronomie.* — M. **OSKAR BACKLUND**, à Poulkovo, le 29 août.

*Section de Géographie et Navigation.* — Le général **GALLIENI**, à Versailles, le 27 mai.

*Section d'Économie rurale.* — M. **ÉDOUARD HECKEL**, à Marseille, le 20 janvier.

*Section d'Anatomie et Zoologie.* — M. **ÉMILE MAUPAS**, à Alger, dans la nuit du 17 au 18 octobre.

*Section de Médecine et Chirurgie.* — M. **GUIDO BACCELLI**, à Rome, le 10 janvier.

*Correspondants élus depuis le 1<sup>er</sup> janvier 1916.*

*Pour la Section de Géométrie.* — M. **LIAPOUNOFF**, à Petrograd, le 6 mars, en remplacement de M. **PAUL GORDAN**, décédé; M. **CH. DE LA VALLÉE POUSSIN**, à Louvain, le 13 mars, en remplacement de M. **FÉLIX KLEIN**.

*Pour la Section de Mécanique.* — M. **ARIÈS**, à Versailles, le 6 novembre, en remplacement de M. **CONSIDÈRE**, décédé.

*Pour la Section d'Astronomie.* — M. **GONNESSIAT**, à Alger, le 10 juillet, en remplacement de M. **G.-W. HILL**, décédé.

*Pour la Section de Chimie.* — M. **WALDEN**, à Riga, le 10 juillet, en remplacement de M. **EMIL FISCHER**.

*Pour la Section d'Anatomie et Zoologie.* — M. **RAMON CAJAL**, à Madrid, le 26 juin, en remplacement de M. **JEAN PÉREZ**, décédé; M. **BOULENGER**, à

Londres, le 3 juillet, en remplacement de M. WALDEYER; M. BATAILLON, à Dijon, le 10 juillet, en remplacement de M. J.-H. FABRE, décédé.

*Pour la Section de Médecine et Chirurgie.* — M. YERSIN, à Nha-Trang, Annam, le 17 avril, en remplacement de M. ERNST VON LEYDEN, décédé; M. BERGONIÉ, à Bordeaux, le 15 mai, en remplacement de M. MOSSO, décédé; M. MORAT, à Lyon, le 26 juin, en remplacement de M. ZAMBAGO, décédé; M. DEPAGE, à Bruxelles, le 10 juillet, en remplacement de M. GUIDO BACCELLI, décédé.

*Correspondants à remplacer.*

*Section d'Astronomie.* — M. AUWERS, mort à Berlin, le 24 janvier 1915; M. OSKAR BACKLUND, mort à Poulkovo, le 29 août 1916.

*Section de Géographie et Navigation.* — M. TH. ALBRECHT, mort à Potsdam, le 31 août 1915; le général GALLIENI, mort à Versailles, le 27 mai 1916.

*Section de Physique générale.* — M. GOUY, à Lyon, élu Membre non résident le 28 avril 1913.

*Section de Chimie.* — Sir HENRY ROSCOE, mort à Londres, le 18 décembre 1915.

*Section de Minéralogie.* — M. VASSEUR, mort à Marseille, le 9 octobre 1915.

*Section d'Économie rurale.* — M. ÉDOUARD HECKEL, mort à Marseille, le 20 janvier 1916.

*Section d'Anatomie et Zoologie.* — M. ÉMILE MAUPAS, mort à Alger, dans la nuit du 17 au 18 octobre 1916.

**MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS**  
DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

En prenant possession du fauteuil de la Présidence, M. d'ARSONVAL s'exprime en ces termes :

MES CHERS CONFRÈRES,

A l'honneur de présider nos séances s'ajoute aujourd'hui pour moi le plaisir de remercier, en votre nom, mon prédécesseur. Notre vénéré Confrère, M. Jordan, a rempli ses fonctions avec une bonne grâce, une régularité et une modestie que nous n'oublierons pas.

Son mérite est grand après les glorieux mais cruels sacrifices que la Patrie a exigés de lui. Il reste pour nous un honneur et un exemple.

Le choix que vous avez bien voulu faire de ma personne pour lui succéder m'honore autant qu'il m'intimide et je vous en exprime ma profonde reconnaissance.

Pour mener à bien la tâche qui m'incombe, je compte sur la bienveillance que vous me témoignez depuis près d'un quart de siècle et sur l'amitié de nos Secrétaires perpétuels.

Je compte aussi sur le concours de notre Vice-Président, dont la jeunesse ignorera cette mélancolie inhérente à la fonction et dont la cause a été si éloquemment signalée par mon ami Edmond Perrier.

Si le génie de l'invention n'a jamais été contesté à notre race, il était réservé à notre Vice-Président de l'organiser en faveur de la Victoire.

Bien qu'il ait travaillé si activement à la préparer, il ne m'en voudra pas si je tiens à lui ravir l'honneur et le bonheur de la célébrer avant de lui avoir cédé ma place.

En attendant ce jour heureux et proche, j'adresse en votre nom à tous nos glorieux défenseurs, ceux de l'arrière comme ceux de l'avant, l'expression émue de notre admiration et de notre éternelle gratitude.

M. le **SECRETARE PERPETUEL** présente le nouvel *Annuaire* spécial à l'Académie des Sciences et indique sommairement les renseignements qui y sont contenus.

ASTRONOMIE. — *Sur le principe d'une nouvelle lunette zénithale.*

Note de M. G. **BIGOURDAN**.

Sous le titre assez vague d'instruments *zénithaux* on désigne ceux qui permettent de mesurer les distances angulaires des astres au zénith. Ordinairement cette mesure se fait suivant le méridien; ces instruments fournissent ainsi les déclinaisons quand on connaît la latitude, et inversement.

Ils ont toujours joué un grand rôle dans l'astronomie d'observation; il semble même que leur importance a grandi encore dans les dernières années, par suite de la découverte de la variation des latitudes et de la possibilité, aujourd'hui entrevue, de mettre en évidence des variations de la verticale, sous l'influence de la Lune par exemple.

Un exposé critique du principe de ces instruments, et des méthodes qu'ils permettent de mettre en usage, serait un Chapitre intéressant de l'histoire de l'Astronomie. On y aperçoit plusieurs types ou grandes divisions, correspondant aux moyens employés pour déterminer le zénith.

Ce sont d'abord les *secteurs*, dans lesquels le zénith est donné par le fil à plomb. Le premier fut employé par Picard en 1670-1671, dans sa *Mesure de la Terre*, pour déterminer l'amplitude de son arc terrestre; et un autre servit à Bradley pour des déterminations de parallaxes annuelles, qui le conduisirent à la découverte de l'aberration, puis de la nutation: dès ce moment ce genre d'instruments donnait à peu près toute la précision dont il paraît susceptible.

Vinrent ensuite les instruments, variés et encore très employés, dans lesquels le zénith est déterminé par le niveau à bulle d'air. De ce nombre sont les cercles verticaux.

Une troisième catégorie, qui s'entremêle avec la précédente, est celle des instruments où le zénith résulte de pointés sur le nadir, fourni par le bain de mercure, dont l'usage a été proposé par Bohnenberger en 1826.

Enfin deux autres types d'instruments donnant aussi les distances zénithales sont, d'une part les lunettes tournant dans le premier vertical, et de l'autre les instruments flottants, dont l'usage est encore peu répandu.

L'antique secteur étant mis de côté, il serait difficile de dire quel est, de ces divers types d'instruments, celui qui permet d'atteindre la plus haute précision; et chacun a ses partisans. On peut cependant discerner certains principes directeurs permettant d'orienter les recherches pour augmenter encore la précision.

Ainsi la plupart de ces instruments exigent un retournement, et l'on admet que dans cette opération l'instrument reste absolument identique à lui-même.

Indépendamment du mode de détermination du zénith il faut donc faire entrer en ligne de compte l'étendue des déplacements qu'exige le retournement. Pour choisir un exemple, considérons le cercle méridien : le lieu du zénith est déduit de celui du nadir; et pour déterminer celui-ci il faut placer la lunette verticale, objectif en bas; puis, pour viser les étoiles, le placer objectif en haut.

Dans cette opération la collimation peut changer, par suite de quelque déplacement de l'objectif, qu'il est impossible de serrer fortement dans son barillet.

En outre les flexions ne sont pas les mêmes dans les deux cas et surtout la matière de l'instrument ne travaille pas de la même manière. Ainsi, toutes choses égales d'ailleurs, on devra donner la préférence aux méthodes qui exigent les moindres déplacements, et surtout n'admettre que des déplacements où les divers organes des instruments gardent les mêmes positions par rapport à la direction de la pesanteur.

C'est ce que j'avais cherché à réaliser dans un dispositif proposé en 1898, mais exigeant des conditions d'installation qui ne se sont pas présentées<sup>(1)</sup>. Son avantage était de n'exiger aucun déplacement de la lunette, dans le champ de laquelle on voit à la fois le zénith et les étoiles.

Un autre procédé équivalent, et qui n'a été décrit que sommairement<sup>(2)</sup>, exige un objectif de forme spéciale.

Le nouveau que je vais indiquer sera peut-être plus facile à réaliser; il répond d'ailleurs à la condition indiquée de n'imprimer à l'instrument que des déplacements faibles, et où la pesanteur agit toujours de la même manière sur toutes ses parties.

---

(1) G. BIGOURDAN, *Sur une méthode différentielle propre à déterminer les variations de la latitude et la constante de l'aberration* (Comptes rendus, t. 127, 1898, p. 848).

(2) G. BIGOURDAN, *Notice de ses travaux scientifiques*, second Supplément, page 59.

Il se composerait essentiellement de deux lunettes Z et N, de puissance optique comparable, munies de micromètres, bien liées ensemble et placées de manière à remplir approximativement les conditions suivantes :

Leurs axes optiques sont parallèles, verticaux, visent deux points diamétralement opposés, et l'ensemble peut tourner de  $180^\circ$  autour d'un axe vertical A. Un bain de mercure est placé sous la lunette qui vise le nadir, et les micromètres des lunettes ont leurs vis micrométriques parallèles au méridien. La condition essentielle est que dans l'intervalle d'une observation, comportant un retournement autour de l'axe vertical A, la position relative des deux lunettes reste bien invariable <sup>(1)</sup>.

Ces conditions supposées remplies, pour déterminer la distance zénithale méridienne d'une étoile culminant près du zénith on procédera ainsi : Un peu avant la culmination de l'étoile on pointera le nadir avec la lunette N qui a son objectif en bas, puis l'étoile avec l'autre lunette Z; on tournera le système de  $180^\circ$  autour de l'axe vertical, après quoi on pointera l'étoile à nouveau avec la lunette Z, puis le nadir avec la lunette N.

L'axe A étant resté invariable, les deux pointés faits avec la lunette N donneront alors le double de l'inclinaison, dans le méridien, de l'axe de rotation A; et les deux pointés faits avec la lunette Z donneront le double de la distance de l'étoile à l'axe de rotation ou zénith instrumental; par somme ou par différence on obtiendra donc le double de la distance zénithale cherchée.

Dans le cas de deux observateurs, les pointés sur l'étoile et sur le nadir pouvaient être absolument simultanés.

Il faut admettre que l'axe A est resté invariable : cette hypothèse est justifiée par les résultats fournis par d'autres instruments portés par un tel axe, le cercle vertical par exemple. D'ailleurs on vérifierait son invariabilité comme à l'ordinaire, avec des niveaux, ou mieux encore avec un système optique qui le transformerait en une lunette pointée sur le bain de mercure.

On notera que si l'on faisait le retournement, non sur une seule étoile, mais sur deux étoiles différentes, l'hypothèse de l'invariabilité de l'axe A ne serait même plus nécessaire.

---

<sup>(1)</sup> Une solution qui s'est présentée d'abord serait de mettre les deux objectifs aux extrémités d'un même tube, ces objectifs étant percés au centre pour donner passage à l'oculaire. Mais l'emploi de deux lunettes bien liées paraît préférable et plus facile à réaliser.

On voit que toutes les parties de cet instrument travaillent toujours dans les mêmes conditions sous l'influence de la pesanteur, de sorte qu'il ne peut intervenir ni flexion, ni déplacement relatif entraînant un changement de collimation.

Parmi les avantages de cet instrument, les suivants sont immédiatement visibles :

1° L'abri est réduit à sa plus simple expression, et la partie mobile serait une plaque simplement posée et manœuvrée à la main.

2° On peut employer de puissants objectifs, de manière à trouver alors facilement un assez grand nombre d'étoiles à observer sur un parallèle quelconque; on pourrait donc multiplier les déterminations, ce qui supprimerait une difficulté des observations zénithales actuelles.

Quant aux questions que l'instrument permettrait d'aborder, ce sont toutes celles qui sont basées sur la détermination précise des distances zénithales et des déclinaisons : latitude et ses variations, constantes de l'aberration et de la nutation, etc.

GÉOLOGIE. — *Sur une faune miocène supérieure marine (Sahélienne) dans le R'arb (Maroc occidental)*. Note (1) de MM. CH. DEPÉRET et L. GENTIL.

La vallée de l'Oued Behts est l'une de celles qui offriront, au point de vue géologique, au Maroc, le plus d'intérêt. La rivière qui la sillonne prend naissance, sous le nom d'Oued Tigrigra, chez les Beni Mguild, alimentée par les eaux d'infiltrations des plateaux jurassiques qui s'étendent au nord du Moyen Atlas; elle traverse, dans son bassin de réception, les déjections basaltiques de volcans récents, puis elle coule sur les terrains paléozoïques dans une région pittoresque. Elle pénètre enfin dans la zone des dépôts du détroit Sud-Rifain après avoir franchi un massif jurassique au fond d'une vallée encaissée.

L'entrée de l'Oued Behts dans les plaines néogènes du R'arb se fait à Dar bel Hamri, poste militaire qui doit son importance au passage de la voie ferrée stratégique de Rabat à Fez.

Un peu en amont de cette station la rivière se développe, en méandres divagants, sur un thalweg argilo-sableux limité par des berges parfois à pic,

---

(1) Séance du 26 décembre 1916.

hautes de 25<sup>m</sup> à 30<sup>m</sup> sur les rives convexes. De belles coupes naturelles s'offrent ainsi qui permettent de relever dans des couches sensiblement horizontales la succession suivante, de la base au sommet, notamment à 1<sup>km</sup>,5 en amont de Dar bel Hamri :

a. Banc de poudingue, à galets bien roulés réunis par un ciment argilo-gréseux, qui affleure au niveau de la rivière. Cette assise irrégulière, de 2<sup>m</sup> à 5<sup>m</sup> de puissance, semble bien représenter un conglomérat de base, mais ne laisse malheureusement pas apparaître son substratum.

b. Au-dessus s'étagent des sables fins, un peu argileux, bleuâtres en profondeur, jaunes ou rougeâtres par oxydation suivant les lignes d'affleurement. Des grès calcarifères, en bancs irréguliers, lenticulaires, résultent d'une consolidation partielle de ces sables et se multiplient en s'élevant. L'épaisseur de cette assise est de 25<sup>m</sup> à 30<sup>m</sup>; elle est très fossilifère.

c. Des cailloutis se montrent au-dessus formant le petit plateau de Dar bel Hamri qui domine la station du chemin de fer.

Notre attention a été appelée par M. Jean Chautard sur la présence de beaux fossiles dans les sables argileux de l'assise médiane.

Sur la rive droite de l'Oued Behts ces débris organisés, surtout des coquilles de Mollusques, apparaissent, admirablement conservés, mais assez fragiles par suite de la perméabilité des sables qui les renferment. Seuls les Huitres et les Pectoncles résistent à la pression des doigts, les autres méritent quelque ménagement pour leur récolte et leur transport (1).

Nous avons repris l'étude détaillée de cette faune à l'aide de beaux matériaux recueillis par l'un de nous, et nous avons pu déterminer une cinquantaine d'espèces dont voici la liste :

I. GASTROPODES. — *Clavatula turriculata*\* Grat., var.; *Clavatula Jouanneti*\* Desm.; *Streptosiphon* nov. sp. aff. *afer* (détermination de M. Dautzenberg); *Nassa mutabilis* L., var. *minor*; *Nassa limata* Chemnitz, var.; *Murex* groupe *bracteatus* Br.; *Chenopus pespelecani* L., var. *minor*; *Terebra Basteroti* Nyst.; *Cassis* cf. *miolævigatus* Sacco\*; *Turritella Archimedis*\* Brongn.; *Turritella terebralis*\* Lam.; *Turritella communis* Risso, var. *ariesensis* Font.; *Natica epiglottina* Lam.; *Natica millepunctata*, var. *minor*; *Natica* n. sp. (groupe *millepunctata*, mais sans funicule);

(1) Ce gisement fossilifère a été déjà reconnu et fouillé par M. G. Lecointre qui en a donné une liste. Cet auteur attribue toute la formation des berges de l'Oued Behts au Pliocène; il considère la faune des sables argileux comme du Pliocène ancien à caractères méditerranéens avec cachet atlantique subtropical à cause de la présence d'un *Yetus* (*Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 556).

*Natica Josephinia* Risso; *Sigaretus striatus* de Serres; *Scalaria Turtoni* Turton; *Calyptræa chinensis* L., var. *muricata* Br.; *Dentalium sexangulum* Schr.; *Dentalium fossile* Schr.

II. LAMELLIBRANCHES. — *Venus plicata* Gm.; *Venus islandicoides* Lam.; *Venus multilamella* Lam.; *Venus gallina* L., *Venus ovata* Penn.; *Cytherea rudis* Poli; *Arcopagia corbis* Bronn.; *Mactra subtruncata* da Costa; *Mactra corallina* L.; *Syndesmya alba* Wood; *Lutraria lutraria* L.; *Tellina planata* L.; *Tellina incarnata* L.; *Tellina nitida* Poli; *Tellina donacina* L.; *Psammobia faroënsis* Chem.; *Lucina fragilis* Phil.; *Solenocurtus strigillatus* L., var. *minor*; *Pharus legumen* L.; *Cardium paucicostatum* Sow.; *Pectunculus insubricus* Broc.; *Arca imbricata*\* Brug.; *Arca pectinata* Broc.; *Pecten (Lissochlamys) excisus* Born.; *Ostrea sacellus* Duj. (aff. *O. cucullata* var. *comitatensis* Font.); *Ostrea gingensis*\* Schl. et formes de passage à *O. crassissima*\* Lam.

*Nota.* — Les espèces marquées d'un astérisque sont exclusivement miocènes.

La détermination de l'âge de cette faune est assez délicate, d'autant plus que les conditions du gisement ne permettent de l'envisager que du seul point de vue paléontologique.

Pour apprécier cet âge, nous répartirons les espèces de la liste précédente en six groupes d'après leurs indications stratigraphiques.

1° Un groupe, le plus nombreux (19), composé d'espèces banales ayant une grande extension verticale allant du Miocène moyen au Pliocène et à la faune actuelle méditerranéenne : *Turritella communis*, *Nassa mutabilis*, *Natica millepunctata*, *Natica Josephinia*, *Chenopus pespelecani*, *Calyptræa chinensis*, *Venus multilamella*, *Venus gallina*, *Venus ovata*, *Cytherea rudis*, *Mactra subtruncata*, *Lutraria lutraria*, *Tellina planata*, *Tellina incarnata*, *Tellina donacina*, *Syndesmya alba*, *Solenocurtus strigillatus*, *Pharus legumen*, *Cardium paucicostatum*.

2° Un groupe de trois espèces à la fois actuelles et pliocènes, n'ayant pas encore été trouvées dans le Miocène : *Tellina nitida*, *Psammobia faroënsis*, *Mactra corallina*.

3° Un groupe comprenant une seule espèce exclusivement pliocène : *Pecten excisus*.

4° Un groupe de quinze espèces, connues à la fois dans le Miocène et dans le Pliocène : *Nassa limata*, *Natica epiglottina*, *Sigaretus striatus*, *Scalaria Turtoni*, *Murex* cf. *bracteatus*, *Terebra Basteroti*, *Dentalium sexangulum*, *Dentalium fossile*, *Venus plicata*, *Venus islandicoides*, *Arcopagia corbis*, *Arca pectinata*, *Pectunculus insubricus*, *Lucina fragilis*, *Ostrea* groupe *sacellus* et *cucullata* var. *comitatensis*.

5° Un groupe de sept espèces à signification exclusivement Miocène : *Clavatula turriculata*, *Clavatula Jouanneti*, *Cassis miolævigata*, *Turritella Archimedis*, *Turritella terebralis*, *Arca imbricata*, *Ostréa gingensis* et var. passant à *O. crassissima*. Ces espèces, qui sont marquées d'une astérisque dans la liste générale, sont, à notre avis, celles qui donnent à la faune de Dar bel Hamri son cachet le plus essentiel.

6° Un groupe d'une seule espèce à caractère subtropical, spécialement africain : *Streptosiphon* n. sp. (aff. *afer*).

Il résulte de cette analyse paléontologique que la faune de Dar bel Hamri présente un caractère mixte en partie miocène et en partie pliocène, tel en un mot qu'on peut l'attendre d'un étage géologique intermédiaire par sa faune entre les faunes classiques du Miocène moyen et celles du Pliocène ancien. Il s'agit donc de l'étage miocène supérieur ou Sahélien.

Ce Sahélien du Maroc présente d'ailleurs un cachet faunique assez différent de celui du Sahélien de Carnot (vallée du Chéouli) décrit par M. Brives; et ces différences doivent être mises sur le compte d'un faciès également très différent : sables argileux littoraux à Dar bel Hamri, marnes bleues de mer plus profonde à Carnot. Nous pouvons noter cependant la présence de 13 espèces communes aux deux gisements; mais sauf pour *Turritella Archimedis*, il s'agit de formes n'ayant qu'une faible valeur stratigraphique.

La conclusion paléontologique que nous venons de formuler sur l'âge sahélien de la faune de Dar bel Hamri appelle quelques réflexions d'intérêt général.

1° Pour la première fois une faune marine du Miocène supérieur (Sahélien), bien caractérisée, est signalée dans les dépôts du détroit Sud-Rifain, du côté atlantique. L'existence des sédiments de cet âge au Maroc nord-occidental avait été admise par l'un de nous (1) en se basant sur des données stratigraphiques et altimétriques; mais la preuve paléontologique de leur existence n'avait pas été faite : elle est affirmée de façon définitive par la faune de Dar bel Hamri.

2° L'âge miocène supérieur des sables de l'Oued Behts met en harmonie, au point de vue paléogéographique, la structure des grandes plaines du R'arb avec celle des côtes du Maroc occidental. S'ils étaient plus récents, il faudrait admettre qu'un golfe pliocène avait pénétré assez profondément jusqu'à plus de 70<sup>km</sup> des rivages atlantiques actuels, alors que le Plaisancien

(1) LOUIS GENTIL, *Sur les dépôts du détroit Sud-Rifain (Comptes rendus, t. 152, 1911, p. 293).*

a été signalé par l'un de nous dans plusieurs de ses publications (d'accord en cela avec les observations de M. A. Brives et de M. Russo) comme formant une bordure littorale assez étroite sur l'immense étendue de côtes comprise entre le cap Spartel et Agadir.

3° L'extension des sables miocènes de Dar bel Hamri est considérable. C'est au même niveau et dans son prolongement direct que se trouvent les sables, parfois remaniés en petites dunes continentales, mais le plus souvent couverts par une belle végétation de chênes-liège comme celle de la forêt de Mâmora. La même formation se poursuit plus au Sud jusqu'au delà de Tiflet et les sables prennent ensuite la consistance d'un grès sableux calcarifère au bord de l'Oued Bou Regreg, ainsi que semble l'affirmer une faunule de *Pecten* du Miocène supérieur, signalée par l'un de nous.

A l'est de Dar bel Hamri le même niveau sableux apparaît au voisinage de Fort Petitjean ainsi que l'ont entrevu M. Lecoindre (1) et le Dr E. Poirée (2). En ce point, ils se trouvent à 80<sup>km</sup> de la côte atlantique.

Les sables miocènes de l'Oued Behts ou leur équivalent latéral se poursuivent au Nord où des témoins paraissent conservés à la bordure occidentale des plaines du R'arb jusqu'à Souq el Arbâ. Ce n'est qu'à plus près des rivages atlantiques actuels qu'il faut rechercher le Plaisancien qui existe d'ailleurs un peu partout, le long des côtes. En particulier, il convient de laisser dans le Pliocène les grès calcaires marins de Rabat, malgré les vestiges de Mammifères quaternaires recueillis par M. Lecoindre au bord de la mer (3). Sans doute ces Vertébrés caractérisent à Salé, à Rabat et à Mehdyâ des formations plus récentes, mais il est facile de suivre, en s'enfonçant à l'intérieur depuis la cote 50 jusqu'à l'altitude de 150<sup>m</sup>, les grès marins de Rabat qui forment une assise continue. De plus, au nord de la capitale administrative du Protectorat, on peut voir ces grès se superposer aux sables miocènes de la forêt de Mâmora.

4° Il ne sera pas inutile d'indiquer enfin que le Sahélien marin du R'arb jalonne, du côté atlantique, l'entrée du bras de mer qui se continue à l'Est par le seuil de Taza et la vallée du Chéelif, et par lequel se faisait exclusivement, à l'époque miocène supérieure, la communication de l'Atlantique avec la Méditerranée, conformément à la présomption successivement formulée par Ed. Suess, Ch. Depéret et L. Gentil.

(1) *Loc. cit.*

(2) *Comptes rendus somm. séances S. G. F.*, 17 avril 1916, p. 59.

(3) *Quelques résultats d'une mission dans le Gharb (Maroc occidental)*, en 1914 (*Comptes rendus*, t. 162, 1916, p. 719).

GÉOMÉTRIE INFINITÉSIMALE. — *Sur les réseaux K des quadriques générales.*  
Note (1) de M. C. GUICHARD.

Soit  $M(x_1, x_2, x_3)$  un point qui décrit un réseau sur la quadrique dont l'équation est

$$(1) \quad \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \frac{x_3^2}{A_3} = 1.$$

Je pose

$$(2) \quad x_1 = \sqrt{A_1} \alpha_1, \quad x_2 = \sqrt{A_2} \alpha_2, \quad x_3 = \sqrt{A_3} \alpha_3.$$

Le point  $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  décrit un réseau O sur la sphère de rayon égal à l'unité. Soit

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

le déterminant orthogonal correspondant à ce réseau;  $a, b, m, n$  les rotations correspondantes. Les paramètres directeurs des tangentes au réseau M seront

$$(3) \quad \begin{cases} \xi_1 = \sqrt{A_1} \beta_1, & \xi_2 = \sqrt{A_2} \beta_2, & \xi_3 = \sqrt{A_3} \beta_3, \\ \eta_1 = \sqrt{A_1} \gamma_1, & \eta_2 = \sqrt{A_2} \gamma_2, & \eta_3 = \sqrt{A_3} \gamma_3. \end{cases}$$

En exprimant que le réseau (M) est un réseau K (voir ma Note du 27 novembre) on aura

$$(4) \quad A_1 \beta_1 \gamma_1 + A_2 \beta_2 \gamma_2 + A_3 \beta_3 \gamma_3 = \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v}.$$

D'autre part, on a

$$(5) \quad \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 = 0.$$

Des équations (4) et (5) on déduit

$$(6) \quad (A_1 + \lambda) \beta_1 \gamma_1 + (A_2 + \lambda) \beta_2 \gamma_2 + (A_3 + \lambda) \beta_3 \gamma_3 = \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v}.$$

On en déduit que le point qui a pour coordonnées

$$y_1 = \sqrt{A_1 + \lambda} \alpha_1, \quad y_2 = \sqrt{A_2 + \lambda} \alpha_2, \quad y_3 = \sqrt{A_3 + \lambda} \alpha_3,$$

$\lambda$  étant une constante, décrit un réseau K. Donc :

*L'affinité d'Ivory qui transforme une quadrique en une quadrique homofocale conserve les réseaux K.*

---

(1) Séance du 26 décembre 1916.

Des équations (4) et (5) on déduit aussi

$$(7) \quad \begin{cases} (A_2 - A_1)\beta_1\gamma_1 + (A_2 - A_3)\beta_3\gamma_3 + \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = 0, \\ (A_3 - A_1)\beta_1\gamma_1 + (A_3 - A_2)\beta_2\gamma_2 + \frac{\partial m}{\partial u} + \frac{\partial n}{\partial v} = 0. \end{cases}$$

On en conclut qu'on peut former, dans un espace d'ordre 4, deux déterminants orthogonaux ayant pour rotations

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} \quad \begin{cases} A = \sqrt{A_2 - A_1}\beta_1, & E = \sqrt{A_2 - A_3}\beta_3, & M = n, \\ B = \sqrt{A_2 - A_1}\gamma_1, & F = \sqrt{A_2 - A_3}\gamma_3, & N = m; \\ A' = \sqrt{A_3 - A_1}\beta_1, & E' = \sqrt{A_3 - A_2}\beta_2, & M' = n, \\ B' = \sqrt{A_3 - A_1}\gamma_1, & F' = \sqrt{A_3 - A_2}\gamma_2, & N' = m. \end{cases}$$

Soient

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 & y'_4 \\ \xi'_1 & \xi'_2 & \xi'_3 & \xi'_4 \\ \eta'_1 & \eta'_2 & \eta'_3 & \eta'_4 \end{vmatrix}$$

ces deux déterminants;  $\omega$  la valeur du rapport  $\frac{\sqrt{A_2 - A_1}}{\sqrt{A_3 - A_1}}$ . On a

$$\begin{aligned} \Sigma x_i^2 &= \Sigma x_i'^2 = 1, \\ \Sigma dx_i^2 &= A^2 du^2 + B^2 dv^2, & \Sigma dx_i'^2 &= \omega^2(A^2 du^2 + B^2 dv^2). \end{aligned}$$

Si donc on pose

$$(8) \quad \begin{cases} X_1 = \omega x_1, & X_2 = \omega x_2, & X_3 = \omega x_3, & X_4 = \omega x_4, & X_5 = i\omega, \\ X'_1 = x'_1, & X'_2 = x'_2, & X'_3 = x'_3, & X'_4 = x'_4, & X'_5 = i, \end{cases}$$

les fonctions X et X' sont solutions de l'équation

$$(9) \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v},$$

et, de plus, on a

$$\Sigma X_i^2 = \Sigma X_i'^2 = 0, \quad \Sigma dX_i^2 = \Sigma dX_i'^2 = \omega^2(A^2 du^2 + B^2 dv^2).$$

Si donc on fait

$$(10) \quad y_i = \frac{X_i}{\theta}, \quad y'_i = \frac{X'_i}{\theta},$$

$\theta$  étant une solution quelconque de l'équation (9), les points A ( $y_1, \dots, y_5$ ) et A' ( $y'_1, \dots, y'_5$ ) décrivent dans un espace d'ordre 5 des réseaux O appli-

cables, et l'on a

$$y_5 = \omega y'_5.$$

Si maintenant on prend pour  $\theta$  une combinaison linéaire isotrope de  $X_1, X_2, X_3, X_4$ , par exemple la combinaison

$$\theta = X_1 + iX_2,$$

on pourra supprimer les deux premières coordonnées de A. On arrive donc au résultat suivant :

*Le problème posé revient à trouver deux réseaux O applicables; l'un B( $x_1, x_2, x_3$ ) situé dans un espace d'ordre 3; l'autre B'( $y_1, y_2, \dots, y_5$ ) situé dans un espace d'ordre 5; ces deux réseaux ayant une coordonnée proportionnelle, par exemple*

$$x_1 = \omega y_1.$$

Je coupe le réseau B par le plan  $x_2 + ix_3 = 0$ , j'obtiens une droite L; si je porte B sur B', la droite L vient occuper une position L'. Cette droite L' décrit une congruence. Cette congruence est C, comme harmonique au réseau B'; de plus elle est 2I et si  $Y_1, Y_2, \dots, Y_5$  sont les paramètres directeurs de L', la coordonnée qui rend cette congruence 2I est  $i\omega Y_1$ . De sorte que si les paramètres Y satisfont à l'équation

$$(11) \quad \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} + RY,$$

on aura

$$(12) \quad Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 = h^2 + l^2,$$

$$(13) \quad (1 - \omega_1^2) Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 = 0.$$

Si l'on détermine un angle constant  $\varphi$  par la relation

$$(14) \quad \cos^2 \varphi + (1 - \omega^2) \sin^2 \varphi = 0,$$

on aura

$$(15) \quad Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2 + Y_5^2 = \cos^2 \varphi (h^2 + l^2).$$

La droite  $\Delta(Y_2, Y_3, Y_4, Y_5)$  décrit dans un espace d'ordre 4 une congruence C, en vertu de la relation (15); de plus cette congruence est 2I, la coordonnée complémentaire étant, d'après l'équation (13),  $i\sqrt{1 - \omega_1^2} Y_1$ .

On retombe ainsi sur les congruences C, 2I dans un espace d'ordre 4. Cet élément géométrique se rencontre dans la théorie des surfaces isothermiques.

Si donc on appelle *groupe* l'ensemble des éléments (réseaux et congruences) qu'on peut déduire d'éléments donnés, en appliquant un nombre quelconque de fois les opérations harmoniques et conjuguées, on peut dire :

*Le groupe qui contient les réseaux K des quadriques est identique au groupe qui contient les réseaux O des surfaces isothermiques.*

Je vais signaler rapidement une question qui se rattache à la précédente. C'est la recherche des réseaux  $2C$  d'une quadrique. Soit  $M(x_1, x_2, x_3)$  un réseau  $2C$  situé sur la quadrique ayant pour équation

$$(16) \quad (1 + \omega_1^2)x_1^2 + (1 + \omega_2^2)x_2^2 + x_3^2 = 1.$$

Ce réseau sera applicable sur un réseau  $M_1(y_1, y_2, y_3, y_4)$  situé dans un espace d'ordre 4. Je coupe le réseau  $M_1$  par les plans

$$y_1 + iy_2 = 0, \quad y_3 + iy_4 = 0.$$

On obtient ainsi deux droites  $G_1, H_1$  qui se rencontrent en  $I_1$ . Il y correspond sur le réseau  $M$  des droites  $G, H$  et un point  $I$ . D'après la théorie générale le point  $I$  décrit un réseau  $O$ . Soit  $z_1, z_2, z_3$  les coordonnées de  $I$ . Effectuons sur la figure  $M, G, H, I$  l'affinité définie par les formules

$$x'_1 = \sqrt{1 + \omega_1^2} x_1, \quad x'_2 = \sqrt{1 + \omega_2^2} x_2, \quad x'_3 = x_3.$$

Au système  $M, G, H, I$  correspond le système  $M', G', H', I'$ . Le point  $M'$  décrit un réseau  $O$  sur la sphère de rayon un; donc les congruences  $G'$  et  $H'$  sont des congruences  $C$ ; par suite le réseau  $I'$  est un réseau  $K$ . Les coordonnées de  $I'$  sont

$$Z'_1 = \sqrt{1 + \omega_1^2} Z_1, \quad Z'_2 = \sqrt{1 + \omega_2^2} Z_2, \quad Z'_3 = Z_3.$$

Or parmi les réseaux parallèles à  $I$  il y en a un qui est sur la sphère ayant pour équation

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = 1;$$

donc, parmi les réseaux parallèles à  $I'$  il y en a un qui est situé sur la quadrique ayant pour équation

$$(17) \quad \frac{Z_1'^2}{1 + \omega_1^2} + \frac{Z_2'^2}{1 + \omega_2^2} + Z_3'^2 = 1.$$

La quadrique (17) est polaire réciproque de la quadrique (16) par rapport à la sphère qui a pour équation

$$(18) \quad X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 1;$$

donc :

*Si l'on connaît un réseau 2C de la quadrique (16) on pourra de  $\infty^2$  manières en déduire des réseaux K de la quadrique (17).*

Un réseau C est un cas particulier d'un réseau 2C; il suffit de supposer que  $\gamma_4$  se réduit à une constante; donc :

*Si l'on connaît une déformée de la quadrique (16) on pourra d'une infinité de manières en déduire des réseaux K de la quadrique (17).*

GÉOLOGIE. — *Les formations pléistocènes et la morphologie de la vallée de l'Arc (Savoie). Note (1) de MM. W. RILIAN et J. RÉVIL.*

L'histoire de la vallée de l'Arc pendant les temps pléistocènes peut être reconstituée par l'étude attentive des divers éléments géologiques et morphologiques parmi lesquels il convient de citer :

a. A des altitudes diverses sur les flancs de la vallée des ruptures de pentes, replats ou « banquettes » glaciaires, recouverts fréquemment de dépôts morainiques anciens, dont l'étude a fait l'objet des remarquables publications de M. E. de Martonne (2) qui, pour la plupart, sont antérieurs au stade néowürmien et à l'aide desquels cet auteur a pu reconstituer une série de thalwegs successifs.

b. Des amas morainiques et des dépôts glaciaires du fond de la vallée marquant une série de *réurrences* et de *stades de retrait* tous postérieurs au Néowürmien.

c. Des « cuvettes terminales » correspondant à ces stades et occupées par des *cônes de déjections* et des alluvions interstadières et postglaciaires,

d. Des alluvions et cônes de déjections *interstadières* accumulés par des torrents de fonte et des lacs temporaires morainiques et recouverts par des dépôts glaciaires plus récents (Lanslebourg, Bessans).

e. Des *verrous* rocheux accompagnés d'encoches glaciaires de divers âges et de gorges épigéniques récentes, le lit actuel postglaciaire se trouvant toujours sur le côté de la gauche de la vallée, c'est-à-dire, comme l'a

(1) Séance du 6 novembre 1916.

(2) EMM. DE MARTONNE, *L'évolution des vallées glaciaires alpines, en particulier dans les Alpes du Dauphiné* (Bull. Soc. géol. de France, 4<sup>e</sup> série, t. 12, 1912, p. 516).

ingénieusement remarqué M. Bénévent, au pied du versant le moins ensoleillé.

Les *verrous* de nos vallées alpines, dont M. E. de Martonne a indiqué la genèse, ont subi, depuis leur formation, des sorts différents en rapport avec le régime de creusement ou de remblaiement qui a prévalu dans la section de vallée où ils sont situés.

Certains d'entre eux, en partie *noyés* ou enterrés par le remblaiement postglaciaire (dans les parties inférieures des vallées), d'autres, au contraire, plus ou moins complètement détruits par l'érosion fluviale, ne laissent subsister que des *amorces* plus ou moins anciennes, parfois à une grande altitude, sur les flancs de la vallée surcreusée; d'autres enfin, dans les hautes vallées, se montrent encore intacts avec leurs encoches et une partie de leur revêtement morainique et le creusement d'une gorge torrentielle épigénétique en accentue encore le relief (l'Esseillon, Pas du Roc) en *échaussant* pour ainsi dire l'une de leurs extrémités.

M. Bénévent a fait remarquer <sup>(1)</sup> l'influence que peut avoir eue, sur la formation des encoches qui accidentent les *Verrous* glaciaires, le côté d'insolation minima des vallées alpines. Cet auteur semble admettre la contemporanéité des diverses « encoches » qui accidentent ces verrous rocheux. Nous y voyons plutôt une série de lits épigéniques *successifs*, correspondant à des phases interstadias et par conséquent l'indice d'une sorte de *migration* de l'encoche fluviale ou torrentielle sous-glaciaire, correspondant aux diverses glaciations, la dernière servant de passage au cours d'eau actuel, alors que les autres, qui ont successivement joué le même rôle, ont été depuis façonnées par le passage de simples languettes glaciaires et même successivement abandonnées par la glace à mesure que l'importance du glacier diminuait et que le creusement de la vallée s'accroissait.

Les *encoches* parfois multiples des verrous glaciaires représentent donc pour nous des *thalwegs épigéniques* interglaciaires ou interstadias *successifs* dont le plus récent seul (situé en général du côté le moins ensoleillé de la vallée) fonctionne encore actuellement et a été approfondi en une gorge étroite par l'érosion fluviale postglaciaire, et dont les autres ont été successivement occupés par des languettes glaciaires de divers âges qui les ont façonnées et ont déblayé, pour y substituer des moraines, les alluvions torrentielles qui pouvaient y subsister. *Les plus élevées de ces encoches datent parfois de la période würmienne.*

Le rôle de l'insolation minima, ayant eu pour effet la conservation de l'appareil glaciaire dans la situation où a subsisté l'encoche épigénique actuelle, a été mis en évidence d'une façon plausible, mais on peut se demander s'il ne convient pas plutôt de voir dans l'emplacement si fréquent de cette gorge, au voisinage du flanc est des vallées, la simple manifestation d'une tendance générale ayant une cause purement mécanique dont il resterait à expliquer la nature.

*f.* Des cônes de déjections postglaciaires de divers âges parfois emboîtés les uns dans les autres, dont les plus récents ont provoqué, en déviant le

(1) *Comptes rendus*, t. 158, 1914, p. 742.

cours de l'Arc, le ravinement des cônes plus anciens par cette rivière et la formation de *fausses terrasses* (environs d'Épierre et des Chavannes, Saint-Rémy, Saint-Julien, aval de Thermignon, environs de Bessans).

Grâce à ces éléments, on peut reconnaître de l'aval vers l'amont une série de tronçons et la trace de plusieurs récurrences correspondant à des stades ou stationnements glaciaires.

### CORRESPONDANCE.

M<sup>me</sup> V<sup>ve</sup> **A. DE LA CHAUVINIÈRE** fait hommage à l'Académie d'une photographie de **BIOT** (Jean-Baptiste), Membre de la Section de Géométrie de l'Académie, de 1803 à 1862. Cette photographie, qui a été prise en 1860, deux ans avant la mort du savant physicien, a été donnée par Biot, lui-même, à un membre de la famille de M<sup>me</sup> de la Chauvinière.

**M. L. LAUNOY** adresse des remerciements pour la distinction que l'Académie a accordée à ses travaux.

La **SOCIÉTÉ DE DOCUMENTATION PALÉONTOLOGIQUE** adresse des remerciements pour la subvention qui lui a été accordée sur la *Fondation Loutreuil*.

THÉORIE DES NOMBRES. — *Sur la réduction des formes binaires à coefficients réels de degré quelconque.* Note (1) de **M. GASTON JULIA**, présentée par **M. Émile Picard**.

Une des questions les plus importantes de la théorie arithmétique des formes est, comme l'on sait, celle de la réduction. Dans la classe des formes équivalentes à une forme donnée  $f$ , il s'agit d'en distinguer une ou un nombre fini, qu'on appellera *réduites de  $f$* , et qui représenteront la classe entière que définit  $f$  dans tous les problèmes ultérieurs. Dans son Mémoire *Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres*, Hermite jette les bases d'une théorie de la réduction pour toute forme

---

(1) Séance du 26 décembre 1916.

naire à coefficients réels; il développe les calculs pour les formes cubiques, puis, dans le premier de ses deux Mémoires *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (Œuvres, t. I), il les développe pour les formes biquadratiques ayant toutes leurs racines réelles. Les remarques suivantes fournissent une interprétation géométrique de la méthode d'Hermite qui éclaire cette méthode d'un jour favorable, et permet de se représenter simplement la plupart des résultats qu'Hermite déduit du calcul, ainsi que ceux qu'on peut trouver en s'inspirant de sa méthode pour les cas qu'il n'a pas traités.

Hermite considère la forme de degré  $n$

$$(1) \quad f(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + \dots + a_n y^n$$

et l'équation

$$(1') \quad f(z, 1) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

Les coefficients étant réels, on aura  $\mu$  racines réelles et  $\nu$  couples de racines imaginaires conjuguées ( $\mu + 2\nu = n$ ). En soumettant au besoin  $f$  à une substitution modulaire préalable à coefficients réels, on peut supposer  $a_0 \neq 0$ .

A  $f$ , on associe la forme quadratique définie

$$(2) \quad \varphi = \sum_{i=1}^{\mu} t_i^2 (x - \alpha_i y)^2 + 2 \sum_{j=1}^{\nu} u_j^2 (x - \beta_j y)(x - \beta'_j y) = px^2 - 2qxy + ry^2,$$

les  $\alpha_i$  étant les  $\mu$  racines réelles de (1'); ses  $(\beta_j, \beta'_j)$  des  $\nu$  couples de racines conjuguées. On imagine que, pour toutes valeurs des paramètres  $(t, u)$ , on réduise  $\varphi$  et fasse dans  $f$  la substitution qui réduit  $\varphi$  ( $\Phi = \varphi S$ ,  $F = fS$ ). On obtient ainsi un ensemble de formes  $F$  qu'Hermite désigne par la notation  $(f)$ , parmi lesquelles vont être choisies la ou les réduites équivalentes à  $f$ .

Si l'on marque dans le demi-plan analytique supérieur les points d'affixes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$  (les  $\beta'_j$  étant supposés dans le demi-plan inférieur), et si l'on représente comme à l'habitude la forme  $\varphi$  par le point  $\zeta$  du demi-plan supérieur racine de

$$\varphi(z, 1) = pz^2 - 2qz + r = 0; \quad \frac{\zeta + \zeta'}{2} = \Re(\zeta) = \frac{q}{p}; \quad \text{Norme } \zeta = \frac{r}{p} = \zeta\zeta',$$

il est aisé de démontrer que le point  $\zeta$  décrit l'intérieur et le périmètre du plus petit polygone convexe non euclidien  $D$  contenant à son intérieur ou sur son

périmètre tous les points racines  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu$ . Ce polygone a pour côtés des droites non euclidiennes, c'est-à-dire des arcs de cercles orthogonaux à l'axe réel; il est convexe, c'est-à-dire qu'il n'est traversé par aucun de ses côtés prolongé indéfiniment, et tout polygone convexe non euclidien renfermant toutes les racines précédentes renferme  $D$  à son intérieur ou coïncide avec lui.  $D$  a en particulier pour sommets tous les  $\alpha_i$ . Réduire la forme quadratique définie dont  $\zeta$  est le point représentatif, c'est faire sur elle la substitution modulaire  $S$

$$x = aX + bY, \quad y = cX + dY$$

( $a, b, c, d$ , entiers réels,  $ad - bc = 1$ ) qui transforme  $\zeta$  en un point  $Z$

$$\left( \zeta = \frac{aZ + b}{cZ + d} \right)$$

intérieur au domaine fondamental connu  $\mathfrak{O}_0$  du groupe modulaire dans le demi-plan analytique. Si l'on considère la division modulaire du demi-plan et le polygone  $D$  associé à la forme  $f$  étudiée, l'ensemble des substitutions  $S$  qui réduiront  $\varphi$  lorsque les  $(tu)$  prendront toutes les valeurs possibles est l'ensemble des substitutions qui amènent sur  $\mathfrak{O}_0$  chacun des triangles  $\mathfrak{O}$  de la division modulaire avec lesquels  $D$  a au moins un point commun.

Hors le cas banal où toutes les racines réelles seraient rationnelles, cas qu'on exclut en arithmétique en ne considérant que des formes  $f$  irréductibles, l'ensemble des  $S$  et par suite celui des  $(f)$  compte une infinité d'éléments si l'une au moins des racines de  $f$  est réelle. Le seul cas où  $(f)$  ne compte qu'un nombre fini de formes est celui où  $f$  n'a que des racines imaginaires; on peut dire à un changement de signe près que  $f$  est positive. [C'est là un résultat qui pourrait suffire pour faire la réduction des formes positives, toute  $(f)$  pourrait être appelée réduite.] Car c'est le seul cas où  $D$  étant au-dessus de l'axe réel et ne l'atteignant pas, n'empiète que sur un nombre fini de triangles  $\mathfrak{O}$ .

Pour définir dans tous les cas la réduite, on envisage la fonction

$$\theta = \frac{a_0^2 \delta^{\frac{n}{2}}}{t_1^2 \dots t_n^2 u_1^2 \dots u_n^2},$$

$\delta$  étant le déterminant de  $\varphi$  ( $\delta = pr - q^2$ ) et l'on cherche les valeurs de  $(tu)$  qui rendent  $\theta$  maximum absolu. Ces valeurs substituées dans  $\varphi$  donnent ce qu'on appelle la correspondante quadratique de  $f$ . La substitution qui la réduit, faite aussi dans  $f$ , donnera la réduite de  $f$ . L'étude des réduites équivaut à celle des correspondantes. Pour les formes cubiques et biquadra-

tiques, les correspondantes reçoivent à l'aide des polygones des figurations géométriques simples.

1° Formes cubiques à trois racines réelles.  $D$  est un triangle non euclidien de sommets  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . La correspondante est représentée par l'*orthocentre non euclidien* de  $D$  [intersection des droites non euclidiennes (hauteurs) menées par les sommets orthogonalement aux côtés opposés].

2° Formes cubiques à une racine réelle.  $D$  est l'arc du cercle orthogonal à l'axe réel qui va de  $\alpha$  (racine réelle) à  $\beta$  racine imaginaire ( $\beta'$  conjugué). Les tangentes en  $\alpha$  et  $\beta$  à ce cercle se rencontrent en  $K$ , et  $K\beta'$  coupe l'axe réel en  $P$  qui est la projection sur cet axe du point  $\zeta$  de l'arc  $\alpha\beta$  qui représente la correspondante de  $f$ .

3° Formes biquadratiques à quatre racines réelles.  $D$  est un quadrilatère non euclidien de sommets  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ . La correspondante est représentée par le *point d'intersection  $\zeta$  des diagonales non euclidiennes*.

4° Formes biquadratiques; deux racines réelles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ ; deux imaginaires  $\beta$  et  $\beta'$ .  $D$  est le triangle non euclidien de sommets  $\beta, \alpha_1, \alpha_2$ .  $\zeta$  représentatif de la correspondante est sur la *hauteur non euclidienne  $\beta\zeta$* , menée de  $\beta$  à  $\alpha_1, \alpha_2$ , et au *milieu non euclidien du segment  $\beta\zeta$*  de cette hauteur compris entre  $\beta$  et son pied  $\zeta$ , sur  $\alpha_1, \alpha_2$ .

5° Formes biquadratiques positives.  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont les deux racines du demi-plan supérieur.  $D$  est l'arc  $\beta_1, \beta_2$  du cercle orthogonal à l'axe réel par  $\beta_1, \beta_2$  (segment non euclidien  $\beta_1, \beta_2$ ). La correspondante est représentée par le *milieu non euclidien  $\zeta$  de ce segment non euclidien  $\beta_1, \beta_2$* .

Les cas 4° et 5° ne sont pas traités par Hermite. Par des considérations d'ordre arithmétique et géométrique, on arrive à supprimer bien des calculs dans les trois premiers cas, et à trouver pour le cas général des propositions qui, appliquées aux cinq cas précédents, les relient entre eux pour chaque degré de façon satisfaisante. Un Mémoire ultérieur développera ces considérations.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Une formule asymptotique pour le nombre des partitions de  $n$* . Note (1) de MM. G.-H. HARDY et S. RAMANUJAN, présentée par M. Hadamard.

1. Les divers problèmes de la théorie de la partition des nombres ont été étudiés surtout par les mathématiciens anglais, Cayley, Sylvester et

(1) Séance du 26 décembre 1916.

Macmahon (1), qui les ont abordés d'un point de vue purement algébrique. Ces auteurs n'y ont fait aucune application des méthodes de la théorie des fonctions, de sorte qu'on ne trouve pas, dans la théorie en question, de formules asymptotiques, telles qu'on en rencontre, par exemple, dans la théorie des nombres premiers. Il nous semble donc que les résultats que nous allons faire connaître peuvent présenter quelque nouveauté.

2. Nous nous sommes occupés surtout de la fonction  $p(n)$ , nombre des partitions de  $n$ . On a

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} = \sum_0^{\infty} p(n)x^n \quad (|x| < 1).$$

Nous avons pensé d'abord à faire usage de quelque théorème de caractère *Taubérien* : on désigne ainsi les théorèmes réciproques du théorème classique d'Abel et de ses généralisations. A cette catégorie appartient l'énoncé suivant :

Soit  $g(x) = \sum a_n x^n$  une série de puissances à coefficients positifs, telle qu'on ait

$$\log g(x) \sim \frac{A}{1-x},$$

quand  $x$  tend vers un par des valeurs positives. Alors on a

$$\log s_n = \log(a_0 + a_1 + \dots + a_n) \sim 2\sqrt{An},$$

quand  $n$  tend vers l'infini (2).

En posant  $g(x) = (1-x)f(x)$ , on a

$$A = \frac{\pi^2}{6};$$

et nous en tirons

$$(1) \quad p(n) = e^{\pi \sqrt{\frac{2n}{3}(1+\varepsilon)}},$$

où  $\varepsilon$  tend vers zéro avec  $\frac{1}{n}$ .

3. Pour pousser l'approximation plus loin, il faut recourir au théorème

(1) Voir le grand *Traité Combinatory Analysis* de M. P.-A. Macmahon (Cambridge, 1916).

(2) Nous avons donné des généralisations étendues de ce théorème dans un Mémoire qui doit paraître dans un autre Recueil.

de Cauchy. Des formules

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(x)}{x^{n+1}} dx,$$

avec un chemin d'intégration convenable intérieur au cercle de rayon  $un$ , et

$$(2) \quad f(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\log \frac{1}{x}} e^{\frac{\pi^2}{6 \log \frac{1}{x}}} f\left(\frac{4\pi^2}{\log \frac{1}{x}}\right)$$

(fournie par la théorie de la transformation linéaire des fonctions elliptiques), nous avons tiré, en premier lieu, la formule vraiment asymptotique

$$(3) \quad p(n) \sim P(n) = \frac{1}{4\pi\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}.$$

On a

$$\begin{aligned} p(10) &= 42, & p(20) &= 627, & p(50) &= 204226, & p(80) &= 15796476; \\ P(10) &= 48, & P(20) &= 692, & P(50) &= 217590, & P(80) &= 16606781. \end{aligned}$$

Les valeurs correspondantes de  $P(n) : p(n)$  sont

$$1,145; \quad 1,104; \quad 1,065; \quad 1,051 :$$

la valeur approximative est toujours en excès.

4. Mais nous avons abouti plus tard à des résultats beaucoup plus satisfaisants. Nous considérons la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_1^\infty \frac{d}{dn} \left\{ \frac{\text{ch} \left[ \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \left( n - \frac{1}{24} \right) \right] - 1}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right\} x^n.$$

En faisant usage des formules sommatoires que démontre M. E. Lindelöf dans son beau livre *Le calcul des résidus*, on trouve aisément que  $f(x)$  (on parle, il va sans dire, de la branche principale) a pour seul point singulier le point  $x = 1$ , et que la fonction

$$F(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\log \frac{1}{x}} \left( e^{\frac{\pi^2}{6 \log \frac{1}{x}}} - 1 \right)$$

est régulière pour  $x = 1$ . On est conduit naturellement à appliquer le théo-

rème de Cauchy à la fonction  $f(x) - F(x)$ , et l'on trouve

$$(5) \quad p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(n-\frac{1}{24})}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} + O(e^{k\sqrt{n}}) = Q(n) + O(e^{k\sqrt{n}}),$$

où  $k$  désigne un nombre quelconque supérieur à  $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$ . L'approximation, pour des valeurs assez grandes de  $n$ , est très bonne : on trouve, en effet,

$$\begin{aligned} p(61) &= 1\ 121\ 505, & p(62) &= 1\ 300\ 156, & p(63) &= 1\ 505\ 499; \\ Q(61) &= 1\ 121\ 539, & Q(62) &= 1\ 300\ 111, & Q(63) &= 1\ 505\ 536. \end{aligned}$$

La valeur approximative est, pour les valeurs suffisamment grandes de  $n$ , alternativement en excès et en défaut.

5. On peut pousser ces calculs beaucoup plus loin. On forme des fonctions, analogues à  $F(x)$ , qui présentent, pour les valeurs

$$x = -1, e^{\frac{2\pi i}{3}}, e^{-\frac{2\pi i}{3}}, i, -i, e^{\frac{2\pi i}{5}}, \dots,$$

des singularités d'un type très analogue à celles que présente  $f(x)$ . On soustrait alors de  $f(x)$  une somme d'un nombre fini convenable de ces fonctions. On trouve ainsi, par exemple,

$$(6) \quad p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(n-\frac{1}{24})}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} + \frac{(-1)^n}{2\pi} \frac{d}{dn} \frac{e^{\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(n-\frac{1}{24})}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} \\ + \frac{\sqrt{3}}{\pi\sqrt{2}} \cos\left(\frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{18}\right) \frac{d}{dn} \frac{e^{\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(n-\frac{1}{24})}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}} + O(e^{k\sqrt{n}}),$$

où  $k$  désigne un nombre quelconque plus grand que  $\frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

ASTRONOMIE. — *Les théories des nébuleuses spirales et le sens véritable de leur rotation.* Note (1) de M. ÉMILE BELOT, présentée par M. Bigourdan.

L'importance cosmique des nébuleuses spirales est considérable tant par leur nombre, évalué à 120 000, que par leur spectre stellaire qui peut faire supposer qu'elles seraient des Voies lactées indépendantes de la nôtre.

La découverte faite au mont Wilson par A. van Maanen du sens de rotation des nébuleuses spirales M. 101 et M. 81 est donc capitale pour la connaissance de l'Univers. Il a trouvé pour M. 101 que les ailes tournent *en avant* de la rotation du noyau, le rayon vecteur des branches spirales augmentant dans le sens de cette rotation, et que pour 52 points se prêtant à une comparaison du mouvement avec la direction des spires, la divergence moyenne vers leur concavité n'est que  $7^\circ \pm 4^\circ$ , tandis que le mouvement radial moyen est de  $0",007$  vers le dehors. En un mot, les spires sont des trajectoires de matière qui en est encore à sa période dispersive et n'est pas encore arrivée à son équilibre radial entre la force centrifuge et l'attraction centrale. La durée de rotation à 5' du centre est de 85 000 ans, mais elle augmente avec la distance au centre en sorte que, la partie extérieure des spires prenant du retard sur la partie intérieure, leur forme changera avec le temps comme si elles étaient refoulées sur elles-mêmes, ce que leur attraction interne suffirait à produire.

Les auteurs qui ont esquissé des théories des nébuleuses spirales ont tous conclu à une rotation en sens inverse de la rotation réelle. Les uns ont imaginé un choc presque direct de deux soleils ou une formation centripète par attraction mutuelle de deux nébuleuses linéaires, les autres une appulse d'étoiles provoquant des explosions sur la ligne des centres, ou enfin des éruptions diamétralement opposées ressemblant à de gigantesques protubérances; les auteurs sont obligés par leurs théories de supposer que les spires ne sont pas des trajectoires de matière, mais des courbes synchrones comme dans le tourniquet hydraulique, et que d'autre part le *rayon vecteur diminue* quand on tourne dans le sens de la rotation du noyau au lieu que dans la réalité sidérale *il augmente*.

Je tiens à rappeler que, malgré l'opinion contraire soutenue par tant de savants autorisés, ayant pour seul guide la Cosmogonie tourbillonnaire (2),

(1) Séance du 26 décembre 1916.

(2) *Essai de Cosmogonie tourbillonnaire*, 1911.

j'ai présenté sept ans avant la découverte de M. Van Maanen, en août 1909, une théorie complète des nébuleuses spirales au Congrès de Lille de l'Association pour l'avancement des Sciences, dans une Note intitulée : *L'origine dualiste des nébuleuses spirales*, où j'ai prévu le sens véritable de la rotation de ces astres et donné l'équation de leurs spires,

$$(1) \quad \rho = a + \varepsilon e^{b\Omega} \quad (\rho, \Omega \text{ coordonnées polaires}),$$

où  $a$  est le rayon du tourbillon cosmique qui vient en collision avec une nébuleuse amorphe,  $a + \varepsilon$  le rayon du renflement périodique du tourbillon, produit par cette collision. J'ai expliqué la production de la seconde spire diamétralement opposée à la première par la vitesse orbitale supplémentaire que donne aux masses détachées du noyau la vitesse relative  $V$  de la nébuleuse amorphe. J'ai complété la théorie précédente dans une Note présentée par H. Poincaré (1), où j'ai indiqué une expérience permettant de reproduire à la surface d'un liquide les deux spires opposées d'une nébuleuse spirale avec leur sens de rotation véritable. J'avais d'ailleurs eu l'occasion d'observer à Paris, le 31 mai 1909, un cirro-cumulus présentant deux spires en forme de nébuleuse spirale et où le sens de rotation qui put être déterminé était bien celui observé par Van Maanen (observation communiquée le 2 juin 1909 à la Société astronomique de France).

Les suggestions et vérifications suivantes peuvent être faites sur les photographies de nébuleuses spirales et viennent compléter notre théorie :

1° Contrairement à l'opinion parfois exprimée et que démentent les photographies, l'angle  $\beta$  du rayon vecteur avec la tangente à la spire diminue, quand on s'éloigne du noyau, de  $90^\circ$  à la valeur  $\beta$ , donnée par la formule (1)

$$\text{tang } \beta_1 = \frac{1}{B}.$$

La courbe (1) est bien conforme dans leur ensemble aux spires de M. 51 (Chiens de Chasse).

2° Le diamètre aux extrémités duquel partent les spires est perpendiculaire à la vitesse  $V$  dont le sens fait prévoir qu'une des spires peut être dans certains cas refoulée sur elle-même (ainsi pour la condensation secondaire de M. 51) quand elle arrive à être opposée à  $V$ . Dans la région diamétralement opposée où la spire marche dans le sens de  $V$ , elle doit être diluée et dispersée comme on le voit sur M. 51.

---

(1) *Comptes rendus*, t. 134, 1912, p. 1780.